Capitolul 0

Sisteme de numerație

0.1. Sisteme de numerație poziționale

Sistemul zecimal este un **sistem pozițional**, pentru că orice număr este reprezentat printr-un şir de cifre zecimale, adică cifrele de la 0 la 9, fiecare poziție a cifrei în număr având o anumită **pondere**. Valoarea numărului este o sumă ponderată a cifrelor din care este format numărul.

- **exemplu**:

$$5837{,}412 = 5\cdot 10^3 + 8\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0 + 4\cdot 10^{-1} + 1\cdot 10^{-2} + 2\cdot 10^{-3}$$

În cazul general, un număr oarecare scris în baza b sub forma: $x_{n-1}x_{n-2}...x_1x_0, x_{-1}x_{-2}...x_{-m}$, unde $x_i \in \{0,1,...,b-1\}$, are ca valoare suma fiecărei cifre multiplicate cu puterea corespunzătoare a bazei:

$$D = \sum_{i=-m}^{n-1} x_i \cdot b^i$$

- **exemplu**:

Valoarea în baza 10 a numărului 1101,001 scris în baza 2:

$$1101{,}001_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} = 13{,}125_{10}$$

- **exemplu**:

Numărul binar 11101,1011101 se poate reprezenta:

$$11101{,}1011101_2 = 011\ 101{,}101\ 110\ 100_2 = 35{,}564_8$$

$$11101{,}1011101_2 = 0001\ 1101{,}1011\ 1010_2 = 1D{,}BA_{16}$$

Pentru a face conversia din zecimal în baza *b*, se observă că numărul $x_{n-1}x_{n-2}...x_1x_0$, scris în baza *b*, are valoarea:

$$D = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot b^i = ((...(x_{n-1} \cdot b + x_{n-2}) \cdot b + ... + x_2) \cdot b + x_1) \cdot b + x_0$$

• **exemplu**:

Pentru a afla reprezentarea binară a numărului zecimal 179 vom face următorii paşi:

179 : 2 = 89 + **1** (LSB)
89 : 2 = 44 + **1**
44 : 2 = 22 + **0**
22 : 2 = 11 + **0**
11 : 2 = 5 + **1**
5 : 2 = 2 + **1**
2 : 2 = 1 + **0**
1 : 2 = 0 + **1** (MSB)

Aşezând în ordine cifrele obținute ca rest, rezultă: $179_{10} = 10110011_2$.

Pentru partea fracționară, conversia se face separat:

• **exemplu**:

Reprezentarea binară a numărului zecimal 0,61:

$0{,}61 \times 2 = 1{,}22$ **1** (MSB)
$0{,}22 \times 2 = 0{,}44$ **0**
$0{,}44 \times 2 = 0{,}88$ **0**
$0{,}88 \times 2 = 1{,}76$ **1**
$0{,}76 \times 2 = 1{,}52$ **1**
$0{,}52 \times 2 = 1{,}04$ **1**
$0{,}04 \times 2 = 0{,}08$ **0** …

Dacă ne oprim aici, atunci $0{,}61_{10} \approx 0{,}1001110..._2$.

De fapt, mai exact $0{,}1001110_2 = 0{,}609375_{10}$.

0.2. Operații cu numere binare

- **adunarea**

$$\begin{array}{r} 173\ + \\ 42 \\ \hline 215 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ \ \ 1\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \\ 1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\ + \\ 0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0 \\ \hline 1\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,1 \end{array}$$

- **scăderea** (***adunarea cu complementul față de doi***)

$$\begin{array}{r} 25\ + \\ -\ 12 \\ \hline 13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 00011001\ - \\ 00001100 \\ \hline 00001101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 00011001\ + \\ 11110100 \\ \hline \cancel{1}\,00001101 \end{array}$$

complementul față de 2 se calculează prin complementarea biților operandului şi adunarea lui 1: $-12_{10} = 11110011 + 1 = 11110100$.

- atenție la depăşirea capacității de reprezentare (overflow).

- **înmulțirea**

$$\begin{array}{r} -\ 3\ \times \\ 5 \\ \hline -\ 15 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1101\ \times \\ 0101 \\ \hline 1101 \\ 0000\ \ \\ 1101\ \ \ \ \\ 0000\ \ \ \ \ \ \\ \hline 1000001 \end{array} \xrightarrow{-1} -\ 1111$$

si complementare

- **împărțirea**

$$\begin{array}{r|l} 29 & 5 \\ \cline{2-2} 25 & 5 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 11101 & 101 \\ \cline{2-2} 101 & 101 \\ \cline{1-1} 01001 & \\ \ \ \ \ 101 & \\ \cline{1-1} \ \ \ \ 100 & \end{array}$$

0.3. Alte reprezentări binare

- **prin mărime şi semn:**

$+153 = \underline{0}10011001$ $\qquad\qquad$ $-153 = \underline{1}10011001$

- **prin cod BCD (**Binary-Coded Decimal**)**:

153 = 0001 0101 0011

- **prin cod binar-zecimal cu exces trei**:

153 = 0100 1000 0110

- **prin cod Gray (**numerele succesive primesc coduri adiacente**):**

000	$\rightarrow$ 000	100	$\rightarrow$ 110
001	$\rightarrow$ 001	101	$\rightarrow$ 111
010	$\rightarrow$ 011	110	$\rightarrow$ 101
011	$\rightarrow$ 010	111	$\rightarrow$ 100

- **prin cod "1 prin m" :**

dacă m = 4, atunci codurile sunt: 0001, 0010, 0100 şi 1000

- **în virgulă mobilă: (**numărul N se reprezintă sub forma $N = \pm 0, M \times 2^{E}$, unde <u>mantisa</u> M şi <u>exponentul</u> E sunt configuraţii binare**):**

Pentru M = 11001 şi E = 100 numărul reprezentat este 12,5.

$$0{,}11001 \times 2^{100} = 1100{,}1$$

Dacă se reface calculul pentru operaţia $0{,}78125 \times 2^4$ se obţine acelaşi rezultat.

Capitolul 1

Algebre Boole

1.1. Definiția algebrei boolene

O algebră booleană este un ansamblu $\langle M, +, \cdot, = \rangle$ format din mulțimea suport *M* cu un număr finit de elemente, operația binară SAU notată cu simbolul +, operația binară ŞI notată cu simbolul $\cdot$ şi o relație de echivalență între elementele mulțimii *M*, notată cu simbolul =, dacă sunt îndeplinite următoarele 6 axiome:

A1 operațiile sunt închise:
$\forall x, y \in M, \quad x + y \in M; \; x \cdot y \in M$

A2 pentru fiecare operație există un element neutru:
$\forall x \in M$, exista $0 \in M$, a. i. $x + 0 = x$
$\forall x \in M$, exista $1 \in M$, a. i. $x \cdot 1 = x$

A3 operațiile sunt comutative:
$\forall x, y \in M, \quad x + y = y + x; \; x \cdot y = y \cdot x$

A4 operațiile sunt distributive:
$$\forall x, y, z \in M, \quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$
$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

A5 pentru fiecare element $x \in M$ există un element $\overline{x} \in M$:
$x + \overline{x} = 1; \qquad x \cdot \overline{x} = 0$

A6 există cel puțin 2 elemente distincte în mulțimea *M*:
$\exists x, y \in M$, a. i. $x \neq y$

1.2. Teoreme fundamentale

T1 Legile lui 1 şi 0

$\forall x \in M, \quad x \cdot 0 = 0 \; ; \qquad x + 1 = 1$

Demonstrație:

$$x \cdot 0 \overset{A2}{=} (x \cdot 0) + 0 \overset{A5}{=} (x \cdot 0) + (x \cdot \overline{x}) \overset{A4}{=} x \cdot (0 + \overline{x}) \overset{A2}{=} x \cdot \overline{x} \overset{A5}{=} 0$$

$$x + 1 \overset{A2}{=} (x + 1) \cdot 1 \overset{A5}{=} (x + 1) \cdot (x + \overline{x}) \overset{A4}{=} x + (1 \cdot \overline{x}) \overset{A2}{=} x + \overline{x} \overset{A5}{=} 1$$

T2 Legile complementului

$\overline{0} = 1 \; ; \qquad \overline{1} = 0$

Demonstrație:

$x + 0 \overset{A2}{=} x$, deci $\overline{0} + 0 = \overline{0}$. Dar $\overline{0} + 0 \overset{A5}{=} 1$, deci $\overline{0} = 1$.

A doua relație se poate demonstra prin **dualitate**

T3 Legea de unicitate a complementului

$\forall x \in M,$ există un singur complement notat prin $\overline{x}$

Demonstrație:

Presupunem că elementul x are 2 complemente $\overline{x}_1$ şi $\overline{x}_2$

$$\overline{x}_1 \overset{A2}{=} \overline{x}_1 + 0 \overset{A5}{=} \overline{x}_1 + (x \cdot \overline{x}_2) \overset{A4}{=} (\overline{x}_1 + x) \cdot (\overline{x}_1 + \overline{x}_2) \overset{A5}{=} 1 \cdot (\overline{x}_1 + \overline{x}_2) \overset{A5}{=}$$

$$(\overline{x}_2 + x) \cdot (\overline{x}_2 + \overline{x}_1) \overset{A4}{=} \overline{x}_2 + (x \cdot \overline{x}_1) \overset{A5}{=} \overline{x}_2 + 0 \overset{A2}{=} \overline{x}_2$$

T4 Legile de idempotență

$\forall x \in M, \quad x + x = x \; ; \qquad x \cdot x = x$

Demonstrație:

$$x + x \overset{A2}{=} (x + x) \cdot 1 \overset{A5}{=} (x + x) \cdot (x + \overline{x}) \overset{A4}{=} x + (x \cdot \overline{x}) \overset{A5}{=} x + 0 \overset{A2}{=} x$$

A doua relație se poate demonstra prin **dualitate**

T5 Legile de absorbție

$$\forall x, y \in M, \quad x+(x\cdot y)=x\ ; \qquad x\cdot(x+y)=x$$

Demonstrație:

$$x+(x\cdot y) \overset{A2}{=} (x\cdot 1)+(x\cdot y) \overset{A4}{=} x\cdot(1+y) \overset{T1}{=} x\cdot 1 \overset{A2}{=} x$$

A doua relație se poate demonstra prin **dualitate**

T6 Legea de involuție

$$\forall x \in M, \quad \bar{\bar{x}} = x$$

Demonstrație:

$$\bar{\bar{x}} \overset{A2}{=} \bar{\bar{x}}+0 \overset{A5}{=} \bar{\bar{x}}+(x\cdot\bar{x}) \overset{A4}{=} (\bar{\bar{x}}+x)\cdot(\bar{\bar{x}}+\bar{x}) \overset{A5}{=} (\bar{\bar{x}}+x)\cdot 1 \overset{A2}{=} (\bar{\bar{x}}+x)$$

$$\bar{\bar{x}} \overset{A2}{=} \bar{\bar{x}}\cdot 1 \overset{A5}{=} \bar{\bar{x}}\cdot(x+\bar{x}) \overset{A4}{=} (\bar{\bar{x}}\cdot x)+(\bar{\bar{x}}\cdot\bar{x}) \overset{A5}{=} (\bar{\bar{x}}\cdot x)+0 \overset{A2}{=} (\bar{\bar{x}}\cdot x)$$

Prin substituție, $x+\bar{\bar{x}}\cdot x=\bar{\bar{x}}$, iar $x+\bar{\bar{x}}\cdot x \overset{T5}{=} x$.

T7 Legile de asociativitate

$$\forall x, y, z \in M, \ (x+y)+z = x+(y+z)\ ; \ (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$$

Demonstrație:

Notăm $(x+y)+z=U$ și $x+(y+z)=V$. Se arată că $U\cdot V=U$ și că $U\cdot V=V$. Rezultă $U=V$.
A doua relație se poate demonstra prin **dualitate**

T8 Legile lui DeMorgan

$$\forall x, y \in M, \quad \overline{x+y}=\bar{x}\cdot\bar{y}\ ; \qquad \overline{x\cdot y}=\bar{x}+\bar{y}$$

Demonstrație:

$$(x+y)\cdot(\bar{x}\cdot\bar{y}) \overset{A4}{=} (x\cdot\bar{x}\cdot\bar{y})+(y\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}) \overset{T7,\ A5,\ A2}{=} 0$$

$$(x+y)+(\bar{x}\cdot\bar{y}) \overset{T7}{=} (x+\bar{x}\cdot\bar{y})+y \overset{A4,\ A5,\ A2}{=} x+\bar{y}+y \overset{A5,\ T1}{=} 1$$