Capitolul 2

<u>Funcții binare</u>

2.1. Definiție. Exemple

O funcție $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ se numeşte funcție binară de n variabile binare independente. Domeniul de definiție este mulțimea:

$$\{0,1\}^n = \{(x_1 x_2 \ldots x_n) | x_1 \in \{0,1\}, x_2 \in \{0,1\}, \ldots, x_n \in \{0,1\}\}$$

- card $\left(\{0,1\}^n\right) = 2^n$

- numărul de funcții binare distincte de n variabile:

$$N = \sum_{i=0}^{2^n} C_{2^n}^{i} = 2^{2^n}$$

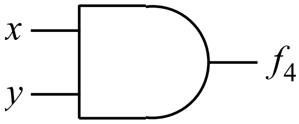
de exemplu, pentru $n = 2$:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1

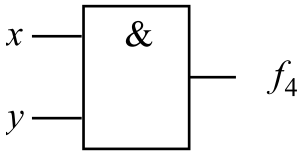
$f_0 = 0$ - funcția nulară

$f_{15} = 1$ - funcția unară

- <u>conjuncția:</u> $f_4 = x \cdot y$ ŞI (AND)

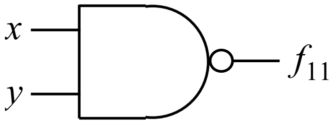


MIL

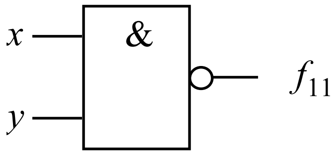


CEI

- <u>negarea conjuncției:</u> $f_{11} = \overline{x \cdot y}$ ŞI-NU (NAND)

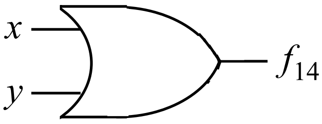


MIL

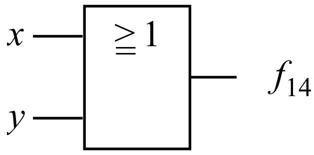


CEI

- <u>disjuncția:</u> $f_{14} = x + y$ SAU (OR)

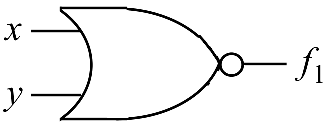


MIL

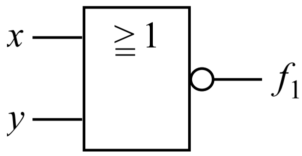


CEI

- <u>negarea disjuncției:</u> $f_1 = \overline{x + y}$ SAU-NU (NOR)

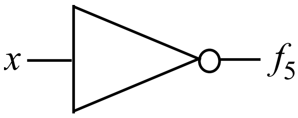


MIL

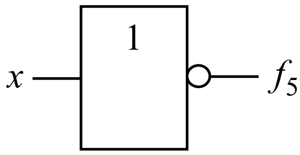


CEI

- <u>negația:</u> $f_5 = \overline{x}$, $f_6 = \overline{y}$ INVERSOR (NOT)

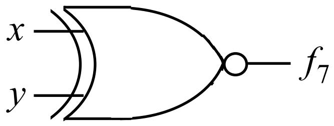


MIL

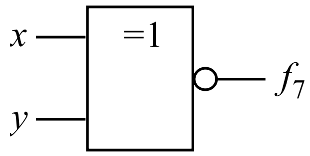


CEI

- <u>echivalența:</u> $f_7 = \overline{x \oplus y}$ COINCIDENȚĂ (COMPARATOR)

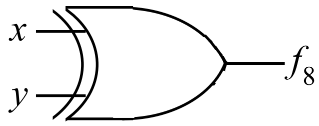


MIL

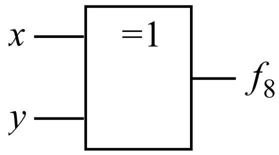


CEI

- <u>negarea echivalenței:</u> $f_8 = x \oplus y$ SAU EXCLUSIV (XOR)

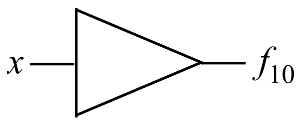


MIL

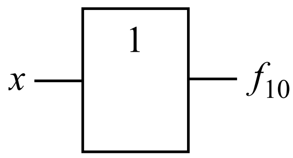


CEI

- <u>funcția identitate:</u> $f_{10} = x$, $f_9 = y$ IDENTITATE



MIL



CEI

2.2. Modalități de reprezentare

- <u>**tabel de adevăr**</u>
- <u>**expresie booleană**</u>
  - formă canonică
  - formă elementară
  - formă neelementară
- <u>**geometrică**</u>
- <u>**diagrama Veitch - Karnaugh**</u>

Forme canonice

- termeni canonici:
  - conțin **toate** variabilele independente ale funcției sub formă directă sau negată
  - pot fi de tip produs logic (P_i) sau sumă logică (S_i), unde $i = \overline{0, 2^n - 1}$ pentru o funcție de n variabile

- **forma canonică disjunctivă** este formată din disjuncția termenilor P_i, $f_{cd} = \bigcup_{i=0}^{2^n-1} a_i \cdot P_i$, unde $a_i = 0 \text{ sau } 1$, funcție de absența sau prezența termenului P_i din sumă.

- **exemplu**:

  Teorema de expansiune booleană:

  Dacă $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ este o funcție binară, atunci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{x}_1 \cdot f(0, x_2, \ldots, x_n) + x_1 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n)$, pentru $\forall (x_1 x_2 \ldots x_n) \in \{0,1\}^n$.

  Demonstrația este evidentă. Dacă $x_1 = 0$ atunci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n)$, iar dacă $x_1 = 1$ atunci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(1, x_2, \ldots, x_n)$.

  Funcția de 2 variabile descrisă prin tabelul de mai jos se scrie:

$$f(x_1, x_2) = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot f(0,0) + \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot f(0,1) + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot f(1,0) + x_1 \cdot x_2 \cdot f(1,1)$$

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$$f(x_1, x_2) = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + x_1 \cdot \overline{x}_2 + x_1 \cdot x_2 =$$
$$= P_0 + P_2 + P_3 = \sum (0, 2, 3)$$

- **forma canonică conjunctivă** este formată din conjuncția termenilor S_i, $f_{cc} = \bigcap_{i=0}^{2^n-1}(a_i + S_i)$, unde $a_i = 0$ sau 1, funcție de prezența sau absența termenului S_i din produs.

- **exemple:** funcția $f(x_1, x_2)$ din exemplul anterior devine: $f(x_1, x_2) = x_1 + \bar{x}_2 = S_1$. Se vede uşor că: $\bar{f}(x_1, x_2) = P_1 = \bar{x}_1 \cdot x_2$, deci $f(x_1, x_2) = \overline{\bar{x}_1 \cdot x_2} = x_1 + \bar{x}_2$.
  Un alt exemplu:
  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 =$
  $= \prod(1,\ 2,\ 3)$.

Forme elementare şi neelementare

- **forma elementară** - conține termeni care nu sunt canonici

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 = \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \overline{\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3} = \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1$$

forme elementare disjunctive

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 = (x_1 + \bar{x}_2) \cdot (x_1 + \bar{x}_3)$$

formă elementară conjunctivă

- **forma neelementară** - se poate evidenția dacă mai mulți termeni conțin aceeaşi variabilă:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 = \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot (x_2 + x_3)$$

Reprezentarea geometrică

- $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$ de mai sus se poate scrie sub forma canonică disjunctivă $f(x_1, x_2, x_3) = P_0 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7$ şi se poate reprezenta pe un cub 3-dimensional:

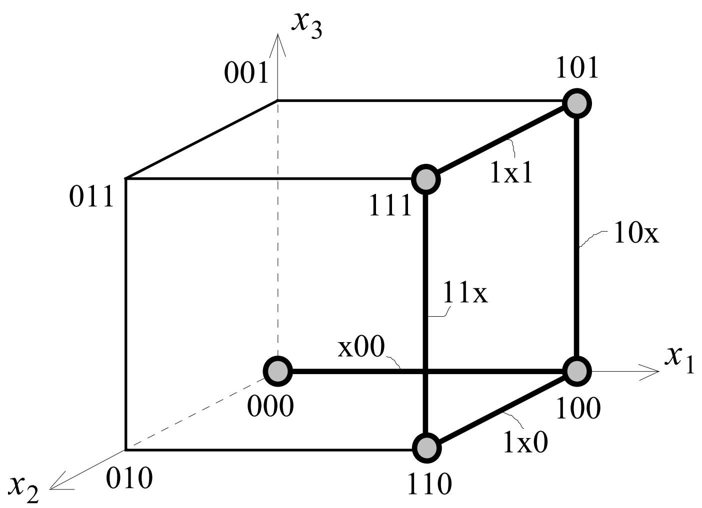


Fig. 2.1 *Reprezentarea geometrică a funcției binare* $f(x_1, x_2, x_3)$

- există mai multe mulțimi de subcuburi pentru reprezentarea lui *f*:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{Bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{Bmatrix},\quad f(x_1,x_2,x_3)=\begin{Bmatrix}\mathrm{x}&0&0\\1&0&\mathrm{x}\\1&\mathrm{x}&1\\1&\mathrm{x}&0\\1&1&\mathrm{x}\end{Bmatrix},\quad f(x_1,x_2,x_3)=\begin{Bmatrix}\mathrm{x}&0&0\\1&\mathrm{x}&\mathrm{x}\end{Bmatrix}$$

0 - dimensionale 1 - dimensionale de diferite dimensiuni

- subcuburile x00 şi 1xx formează o **acoperire** a funcției
- **implicant prim** - un subcub care nu este inclus într-un alt subcub de dimensiune mai mare
- **implicant prim esențial** - un implicant prim care conține un subcub 0-dimensional care aparține numai lui

Reprezentarea pe diagrama Veitch - Karnaugh

- tablou ce conține 2^n compartimente, fiecare fiind rezervat unuia din cele 2^n n-upluri ale funcției de n variabile (sau vârfuri ale cubului n-dimensional)
- compartimentele a 2 n-upluri adiacente sunt vecine în diagramă, considerând coloana din stânga vecină cu cea din dreapta, iar linia de sus vecină cu cea de jos

	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	x_1	x_1	
$\overline{x_3}$	P_0	P_4	P_{12}	P_8	$\overline{x_4}$
$\overline{x_3}$	P_1	P_5	P_{13}	P_9	x_4
x_3	P_3	P_7	P_{15}	P_{11}	x_4
x_3	P_2	P_6	P_{14}	P_{10}	$\overline{x_4}$
	$\overline{x_2}$	x_2	x_2	$\overline{x_2}$	

Veitch

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	P_0	P_4	P_{12}	P_8
01	P_1	P_5	P_{13}	P_9
11	P_3	P_7	P_{15}	P_{11}
10	P_2	P_6	P_{14}	P_{10}

Karnaugh

Fig. 2.2 *Diagrame Veitch-Karnaugh pentru o funcție de 4 variabile*

- un termen produs P_i ocupă aria minimă din diagramă, adică un singur compartiment: se mai numeşte **mintermen**
- un termen sumă S_i ocupă aria maximă din diagramă, adică un număr de $2^n - 1$ compartimente: se mai numeşte **maxtermen**
- funcția $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 = \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + x_1$ are următoarea diagramă Veitch:

	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	x_1	x_1
$\overline{x_3}$	P_0	P_2	P_6	P_4
x_3	P_1	P_3	P_7	P_5
	$\overline{x_2}$	x_2	x_2	$\overline{x_2}$

	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	x_1	x_1
$\overline{x_3}$	1	0	1	1
x_3	0	0	1	1
	$\overline{x_2}$	x_2	x_2	$\overline{x_2}$

Fig. 2.3 *Diagrama Veitch pentru funcția* $f(x_1, x_2, x_3)$